



### Original Contribution

## ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОБЛАСТТА НА УСТОЙЧИВОСТ НА ЛИНЕЙНИ ДИНАМИЧНИ СИСТЕМИ С ПИД – РЕГУЛАТОР

Николай Иванов Петров\*

Тракийски университет – Стара Загора, Технически колеж – Ямбол,

### РЕЗЮМЕ

В доклада е представено решение на задачата за диференцирано изследване на областта на устойчивост на линейните динамични системи за автоматизирано управление (САУ). За решението се използва ходограф на Найквист с проста и сложна конфигурация и се построява точково подмножество за всички точки, за които е изпълнено изискването към честотните характеристики на системата. Анализират се появилите се закономерности поради движението на точки в плоскостта на настройваемите параметри на САУ, свързано с изменение на запаса на устойчивост по фаза. Приведени са съответни примери.

**Ключови думи:** Област на устойчивост; линейни динамични системи

### УВОД

Регулаторите, при които се използва пропорционална, интегрална и диференциална съставляващи на входния сигнал, са известни под наименованието ПИД – регулатори (**PID – controllers**). През последните години построяването и анализът на множеството от всички възможни схеми на ПИД – регулатори, стабилизиращи работата на даден обект за управление, е център на внимание на различни научни работи. Този подход, в сравнение с оптимизационните методи, е по-реалистичен. Той предоставя информация за това в коя област на пространството от параметри за настройка е възможно да се маневрира. Това е особено актуално при изменение на изискванията към динамиката на системите и процесите в САУ [1, 2].

За проектиране на САУ с ПИД – регулатор е важна не само задачата за построяване на областта на устойчивост в пространството от параметри, но и отделянето в тази област на устойчивост на точково подмножество, за всички точки на което се изпълнява изискването за честотен

запас на устойчивост по фаза ( $\varphi$ ) и по амплитуда ( $A$ ). Аналитичното решение на тази задача дълго време не е било възможно [2]. Идеята за използване на  $D$ -разбиването с цел построяване на кривите на постоянните стойности на честотния запас на устойчивост на плоскостта на параметрите и разбиването на тази плоскост на съответни подмножества е предложена първоначално в [3]. Използването на процедурата за  $D$ -разбиването с цел построяването на такива криви е станало възможно благодарение на това, че вместо стандартната критична точка  $(-1, j0)$  на комплексната  $W$  – плоскост, използваща критерия на Найквист, авторът *Robert Cook* въвежда друга критична точка, изместена от точката  $(-1, j0)$  по дъгата на окръжността с единичен радиус на ъгъл  $\varphi$ .

Следващо развитие на тази идея е извършено в [4], благодарение на „поставянето“ в структурната схема на изследваната система на „тестово“ звено с предавателна функция  $A \exp(-j\varphi)$ , с което става възможно да се съхрани „класическата“ критична точка и да се създаде по-удобен метод за практическо приложение [5]. Впоследствие е било забелязано в [6], че предложеният в [3] и усъвършенстван в [4] метод за изследване работи добре само при анализ на системи със

\* **За контакти:** Николай Иванов Петров, Технически колеж – Ямбол, гр. Ямбол 8600, ул. „Граф Игнатиев“ №38, e-mail: [nikipetrov\\_1953@abv.bg](mailto:nikipetrov_1953@abv.bg)

сравнително прост по конфигурация ходограф на Найквист.

В своите трудове руският професор д.ф.м.н. *Юрий Николаев* е разгледал корекцията на метода [4] за САУ, в която ходографът на Найквист има сложна форма. За нея е характерно многократно пресичане на ходографа на единичната окръжност във  $W$  – плоскостта или многократно пресичане на ходографа на отрицателната реална полуос на тази плоскост.

В предложената работа се разглежда решаването на три взаимно-свързани задачи:

- анализ на закономерностите при движението на точката вътре в областта на устойчивост на САУ при изменение на запаса на устойчивост по фаза;
- разбиване на областта на устойчивост на зони с ходограф на Найквист, имащ проста и сложна конфигурация;
- отделяне в областта на устойчивост на плоскостта (пространството) на настройваните параметри на точково подмножество, за всички точки на което да се изпълняват зададените изисквания.

### СЪЩИНСКА ЧАСТ

#### Ресурс на устойчивост по фаза на САУ. Ходограф на Найквист

Да разгледаме затворена САУ с ПИД – регулатор, имаща предавателната функция  $C(s)$  и обект на регулиране с предавателна функция  $G(s)$ , определени от:

$$(1) \quad C(s) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s},$$

$$G(s) = \frac{c(s)}{d(s)},$$

където:  $K_I, K_P, K_D \in R$  са коефициенти на усилването на регулатора по съответните съставляващи на входния сигнал;  $S$  - оператор на диференциране;  $c(s), d(s)$  - реални полиноми на  $s$ , като  $c(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{m-2} s^{m-2}$ ,  $d(s) = d_0 + d_1 s + \dots + d_{m-2} s^{m-2}$ ,  $m \leq n$ .

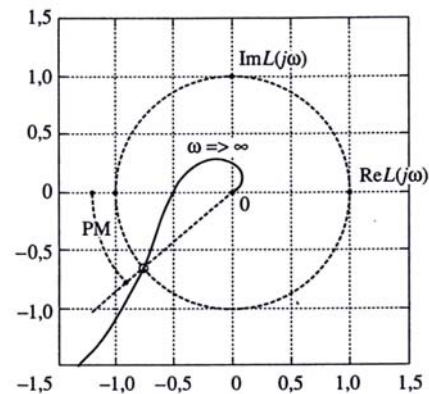
Предавателната функция на отворената САУ се определя от:

$$(2) \quad L(s) = C(s)G(s).$$

След извършване на трансформацията  $s \rightarrow j\omega$  в (2) се получава честотната

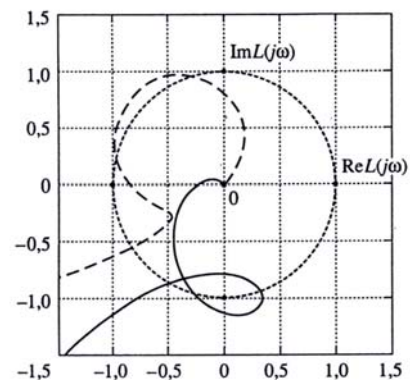
характеристика  $L(j\omega)$  на отворената САУ. Устойчивостта на затворената САУ се определя чрез използването на критерия на Найквист [8] според разположението на ходографа на честотната характеристика относно критичната точка  $(-1, j0)$ .

Ресурсът на устойчивост по фаза (*Phase Margin - PM*) на САУ характеризира отдалечението на ходографа  $L(j\omega)$  по дъгата на окръжността на единичния радиус от критичната точка и се определя от фиг. 1 по ъгъла  $\varphi$  между отрицателното направление на действителната ос и лъча, прекаран през началото на координатите и точката на пресичане на ходографа с окръжността имаща единичен радиус [9].



Фигура 1. Прост ходограф

Ходографът на Найквист е възможно да пресича единичната окръжност в една или в няколко точки. В зависимост от количеството на точките на пресичане с единичната окръжност, той се нарича *прост* (има една точка на пресичане) или *сложен* (две и повече точки на пресичане). Сложният ходограф може да има крива без самопресичане или със самопресичане (фиг. 2).



Фигура 2. Сложен ходограф

За една и съща САУ в зависимост от

стойността на нейните параметри ходографа може да бъде прост или сложен [8]. Изискването към ресурсът на устойчивост по фаза за устойчивите САУ с прост ходограф на Найквист се представя от неравенството:

$$(3) \quad \varphi \geq \varphi_{DOP} > 0.$$

Допустимите стойности на ресурсът на устойчивост по фаза обикновено се считат за равни на  $30^\circ$  [9, 10]. За САУ, имаща прост ходограф на Найквист, е характерно това, че има една единствена честота на среза (**Crossover Frequency**).

Честота на среза е тази честота, при която ходографът  $L(j\omega)$  пресича единичната окръжност, т.е. при която  $|L(j\omega)| = 1$ . За САУ със сложен ходограф на Найквист се говори не за една, а за няколко честоти на среза. При това се определя ресурсът на устойчивост по фаза  $\varphi_r$  за всяка от тези честоти по формулата:

$$(4) \quad \varphi_r = \pi + \arg L(j\omega_c), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

където:  $\omega_c$  е съответната честота на среза на САУ.

В редица случаи за САУ, имащи сложен ходограф на Найквист, е целесъобразно да се представи изискването към ресурса на устойчивост по фаза във вид на неравенството:

$$(5) \quad (2\pi - \varphi_{DOP}) \geq \varphi_r \geq \varphi_{DOP}$$

или  $-\varphi_{DOP} \geq \varphi_r \geq \varphi_{DOP}$ .

В съответствие с условие (4) ходографът не трябва да пресича дъгата на окръжността с единичен радиус, принадлежаща на сектора  $\pm\varphi_{DOP}$ . Като базова предпоставка за анализ в настоящата работа е избрана *фиксирана честота на срез  $\omega_c$* .

### Геометрично място на точки на ПИД плоскостта

За решаването на поставената задача се изисква за САУ с предавателна функция, определена от (2) да се построи и анализира на плоскостта на ПИД-параметрите, формата на кривата, за всички точки на

която честотата на срез  $\omega_c$  е постоянна величина, т.е.  $\omega_c = const$ . При това трябва да се отбележи, че решението на поставената задача се усложнява от наличието на полином в числителя на предавателната функция на обекта за управление.

За преодоляване на посочените трудности се използват следните елементарни и достатъчно ефективни прийоми. Преобразува се формула (2) в следния вид:

$$(6) \quad L(s) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{Q(s)},$$

където функцията  $Q(s)$  се представя от съотношението:

$$(7) \quad Q(s) = \frac{s d(s)}{c(s)} = \frac{s(d_0 + d_1 s + \dots + d_{n-1} s^{n-1})}{c_0 + c_1 s + \dots + c_{m-2} s^{m-2}}.$$

Трябва да се обърне внимание на това, че в числителя на формула (6) след изпълнение на съответните преобразувания остава само един полином  $K(s) = K_I + K_P s + K_D s^2$ . Именно това обстоятелство се явява принципно за следващите теоретични изложения.

**Теорема за устойчивостта на САУ: Геометричното място на точки на плоскостта  $K_I, K_P$ , за която честотата на среза на САУ е постоянна и равна на  $\omega_c$ , се явява РМ елипса, имаща уравнение**

$$(8) \quad \frac{(K_I - K_D \omega_c^2)^2}{R_0^2} + \frac{K_P^2}{R_1^2} = 1.$$

Съответно квадратите на полуосите на РМ елипсата (8) са равни на

$$(9) \quad R_0^2 = \operatorname{Re}^2 Q(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 Q(j\omega_c),$$

$$R_1^2 = R_0^2 / \omega_c^2,$$

като с отчитането на формула (7) следва:

$$(10) \quad R_0^2 = \omega_c^2 \frac{\operatorname{Re}^2 d(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 d(j\omega_c)}{\operatorname{Re}^2 c(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 c(j\omega_c)},$$

$$R_1^2 = \frac{\operatorname{Re}^2 d(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 d(j\omega_c)}{\operatorname{Re}^2 c(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 c(j\omega_c)}.$$

За доказателството на горните постановки се възползваме от приведеното по-горе уравнение  $|L(j\omega)|=1$  за определяне на честотата на среза  $\omega_c$ . На основание на това уравнение и формула (6) следва:

$$(11) \quad \frac{\sqrt{(K_I - K_D\omega_c^2)^2 + K_P^2\omega_c^2}}{\sqrt{\operatorname{Re}^2 Q(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 Q(j\omega_c)}} = 1 .$$

В уравнение (11) се извършва повдигане на двете страни на втора степен, при което следва:

$$(12) \quad \begin{aligned} & (K_I - K_D\omega_c^2)^2 + K_P^2\omega_c^2 = \\ & = \operatorname{Re}^2 Q(j\omega_c) + \operatorname{Im}^2 Q(j\omega_c) . \end{aligned}$$

Като се използват равенства (9) следва преобразованието:

$$(13) \quad (K_I - K_D\omega_c^2)^2 + K_P^2\omega_c^2 = R_1^2\omega_c^2 .$$

Разделяме двете страни на (13) с израза  $R_1^2\omega_c^2 = R_0^2$ , от което следва получаването на формула (8), т.е. доказателството на горната теорема.

Трябва да се отбележи, че каноническата система от координати за РМ елипсата (8) се явява спомагателна система от координати, осите на които  $\widehat{K}_I, \widehat{K}_P$  са паралелни на осите  $K_I, K_P$  и са изместени относно тях на разстояния  $\Delta K_I$  и  $\Delta K_P$ , определени от:

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta K_I &= K_I - \widehat{K}_I = K_D\omega^2, \\ \Delta K_P &= K_P - \widehat{K}_P = 0 . \end{aligned}$$

Аналогично е доказателството за плоскостта  $K_P, K_D$ . За плоскостта  $K_I, K_D$ , т.е. при фиксирано  $K_P = const$ , картината ще бъде друга.

От така доказаната по-горе „Теорема за устойчивостта” на САУ следва следната „Лема”.

**Лема на устойчивостта:** Геометричното място на точки на плоскостта  $K_I, K_D$  на ПИД – регулатор, за който честотата на среза  $\omega_c$ , е постоянна и се изпълнява условието  $R_0^2 > \omega_c^2 K_P^2$ , представлява двойка от прави линии, детерми-

нирани от уравненията

$$K_I = \omega_c K_D \pm \sqrt{R_0^2 - \omega_c^2 K_P^2} .$$

Като следствие от изложеното следва, че геометричното място на то-чки в тримерното пространство от параметри  $K_I, K_P, K_D$  на САУ, за които  $\omega_c = const$ , представлява повърхност от тип „елептически цилиндър”, зададена от уравнение (8) в неявен вид.

### Примерно изследване

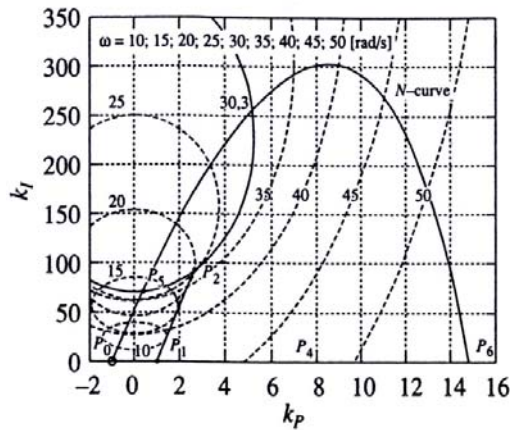
Разглежда се работата на САУ с ПИД – регулатор и предавателна функция

$$L(s) = \frac{(K_I + K_P s + K_D s^2)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$$

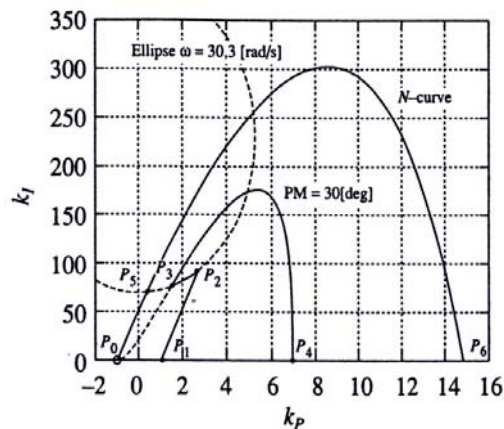
в отворено състояние. В посоченото уравнение  $K_I, K_D = \text{var}$ ,  $K_D = 0,25$ ,  $T_1 = 0,01 \text{ s}$ ;  $T_2 = 0,02 \text{ s}$ ;  $T_3 = 0,06 \text{ s}$ ;  $T_4 = 0,06 \text{ s}$ .

Ако на плоскостта  $K_I, K_P$  е построена областта на устойчивост, то е необходимо да се отдели в нея точково подмножество, за всички точки на които ходографът на Найквист изпълнява зададено изискване към РМ, т.е.  $\varphi \geq \varphi_{DOP}$ . За решаването на задачата в съответствие с предложената мето-дика се изпълнява предварително разделяне на областта на устойчивост на две зони – с прост и сложен ходограф. За тази цел се построява семейство от РМ елипси (8) с честота на среза от  $\omega_c = 0$  до  $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$  (фиг. 3). Анализът показва, че „критическа” се явява елипса (8) с честота на среза  $\omega_c \approx 30,3 \text{ rad/s}$ .

На фиг. 4 се илюстрира разположението и конфигурацията на търсената зона, за всички точки на която ходографът на Найквист се явява прост и се изпълнява изискването към РМ, т.е.  $\varphi \geq \varphi_{DOP}$ .



Фиг. 3. Семейство от РМ елипси



Фигура 4. Търсена зона от РМ елипси

На фиг. 3 и фиг. 4 означенията са следните: *N*-curve – гранична крива на областта на устойчивост;  $P_0P_3P_4$  - гранична крива за подмножеството от точки с  $PM \geq PM_{DOP} = 30^\circ$ ;  $P_3P_2$  - дъга на „критическата“ РМ – елипса;  $P_1P_2$  - обвиваща на семейството от РМ – елипси с  $\omega_c \in [0 \div 30,3] \text{ rad/s}$ .

На фиг. 4, търсеното подмножество е ограничено отгоре от кривата  $P_1P_2P_3P_4$ , а отдолу от отсечката  $P_1P_4$  и абсцисната ос.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия доклад е предложен метод за построяване на множеството от ПИД – регулатори, за което се изпълнява изискването за честотен ресурс на устойчивост (т.е. теоремата за устойчивост). Това изискване се използва на практика масово, като е включено и при разработката на стандарта MIL-F-9490, използван при разработката на системата за автоматична стабилизация на летателните апарати. Основно положение в доклада е проблемът с избирането на фиксирана честота на среза на отворената система. Благодарение на това, сложните задачи от теорията на управлението се свеждат до сравнително проста математи-

ческа задача за построяване и изследване на семейство от елипси, имащи честота на среза, представляваща определена числова последователност. Графичните построявания са извършени на плоскост от два параметъра на регулатора с използването на програмата MATLAB.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ackermann J., Kaesbauer D. Stable Polyhedra in Parameter Space. *Automatika*. 2003, v. 39, p. 937-943.
2. Ho M., Datta A., Brattacharyya S. A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers. *Proc. Amer. Control Conference, IEEE*, 1997, p. 3922-3928.
3. Cook R.P. Gain and Phase Boundary Routine for Two-Loop Feedback Systems. *Trans. Automat. Control*. 1966, v. 11, № 3, p. 573-577.
4. Chang C.H., Han K.W. Gain Margins and Phase Margins for Control Systems with Adjustable Parameters. *J. Guidance Control Dynamics*. 1990. v. 13, № 3, p. 404-408.
5. Бимбиреков Б.Л. Определение параметров регулятора для линейной системы по частотным критериям. *А и Т*. 1993, № 5, с. 3-10.
6. Stenton A.T., Shafiel Z. Relative Stability for Control Systems with Adjustable Parameters. *J. Control Dynamics*. 1994, v. 17, № 2, p. 304-310.
7. Николаев Ю.П. Запас устойчивости по фазе и пространство параметров непрерывной линейной системой. *А и Т*. 2000, № 3, с. 102-113.
8. Nyquist H. Regeneration theory. *Bell Syst. Techn. J.*, 1932, v. 11, p. 126.
9. Петков, П., М. Константинов. Робастни системи за управление. Анализ и синтез с Matlab. „АВС – Техника“, С., 2002, с. 351.
10. Chin J., Chason V., Gera J. X-29A flight control system performance during flight test. *AIAA*, 1987, № 2878, p. 1-12